線形セル構造オートマトンにおける局所関数の群の同型定理について(計算アルゴリズムと計算量の基礎理論)

佐藤, 忠一

数理解析研究所講究録
695巻 1989年 37-44

線形セル構造オートマトンにおける局所関数の群の同型定理について

東洋大学　工学部　佐藤忠一（Tadakazu Sato）

1. まえがき

行列環上の線形セル構造オートマトンにおける局所関数の群は高野によって最初に議論された[1]。有限可換環上の場合と異なり[2]、行列環上の場合は局所関数の群に関して"同型定理"は成り立たない[3]。

本論文では[3]の結果を有限可換環を要素とする行列環上に拡張して、群構造を持つ局所関数の性質を明らかにし、スペクトル分解可能な部分群に対しては同型定理が成り立つことを示す。特に有限可換環上の場合、局所関数の群はスペクトル分解可能になっていることからも同型定理が成り立つことが再び導かれる。

2、準備

Rを有限可換環とし、$M_n(R)$（以下略して、M_n）をR上の$n \times n$行列の全体とする。M_n上の線形セル構造オートマトンとは、

(Z^k, M_n, N, f)で与えられ、Zは整数の集合、Z^kはk次元セル空間、M_nは各セルが取り得る状態の集合で、NはZ^kの有限部分集合で近傍を表わし、$N=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$。$f$は$M_n$の$m$個の直積から$M_n$への線形写像で $f=\sum_{j=1}^{m} A_j x_j$, $A_j \in M_n$ である。fはM_n上のスコープ幅m，又はm変数の局所関数と呼ばれる。

Z^kからM_nへの写像を様相といい、様相の集合を$C(M_n)$で表わす。fに対して写像$f_\infty: C(M_n) \longrightarrow C(M_n)$を次のように定める。

$x, y \in C(M_n)$ に対して、 $f_\infty(x)=y \Leftrightarrow y(r)=\sum_j A_j x(r+v_j)$

ここで、$r+v_1, \cdots, r+v_m$ なるm個のセルは、セル$r \in Z^k$の近傍と呼ばれる。f_∞を線形並列写像、又は線形全域関数という。

定義1　M_n上の線形局所関数 $f=\sum A_j x_j$ が群構造を持つとは、次の演算$*$に対して、fのベキ乗の集合$\langle f \rangle$が群をなし、$\langle f \rangle$の各元がすべて単射になることである。

$$f*f = \sum A_j^2 x_j$$

注意1　有限可換環上の線形局所関数の場合、$\langle f \rangle$の各元はfの性質（単射性，全射性，位数有限性，位数無限性）を保存する。

定義2　$f=\sum A_j x_j$ が群構造を持つ時、$i \neq j$に対して、

$A_i A_j = A_j A_i = 0$ が成り立つならば、fは高野タイプという。

注意2　有限可換環上の群構造を持つ線形局所関数はすべて高野タイプである。しかし、行列環上では高野タイプでない群構造を持つ線形局所関数が存在する。

以下群構造を持つ線形局所関数はすべて高野タイプについて考える。

3. 群構造を持つ線形局所関数

<u>補題1</u>　$f=\sum A_j x_j$ を M_n 上の群構造を持つ線形局所関数とし，その単位元を $f_0=\sum E_j x_j$ とする。この時各 E_j は同時に対角可能である。すなわち，$^\exists P$（正則行列）に対して，各 $P^{-1}E_j P$ $(1\leq j\leq m)$ は対角行列となる。

<u>定理1</u>　（標準形）Rを有限可換な局所環とする。$f=\sum A_j x_j$ を $M_n(R)$ 上の群構造を持つ線形局所関数とし，各 j に対して $\mathrm{rank}\, A_j=r_j$ とする。この時，次式が成立する。

$$P^{-1}A_1P=\left(\begin{array}{c:c} Q_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right),\quad P^{-1}A_2P=\left(\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & Q_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\ \cdots,\quad P^{-1}A_mP=\left(\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & Q_m \end{array}\right)$$

ここで，Q_jは $r_j\times r_j$ の正則行列。Pは補題1で述べた，fの単位元の各係数行列を同時に対角化する正則行列。また $\mathrm{rank}\, A_j$ とは，A_jの小行列で正則行列となるような最大の行列のサイズ。

<u>系1</u>　Rを有限可換環，ℓをRの極大イデアルの個数とする。$f=\sum A_j x_j$ を $M_n(R)$ 上の群構造を持つ線形局所関数とする。この時 fの最大のスコープ幅は $n\ell$ で，その時各 A_jは対角行列に相似である。特にRが局所環（有限可換な）又は有限体の時は，fの最大のスコープ幅はnである。

定理２　M_n 上の線形局所関数 $f=\sum A_j x_j$ に対して、次の各命題は等価である。

(1) f は群構造を持つ。

(2) $R=R_1\oplus\cdots\oplus R_l$ を局所環 R_i への直和分解とする。これにともない f の分解を $f=(f_1,\cdots,f_l)$ とする時、各 f_i は $M_n(R_i)$ 上で群構造を持つ。

(3) $\sum_j A_j$ は $M_n(R)$ 上で正則かつ $i\neq j$ に対して $A_iA_j=A_jA_i=0$

(4) f は $M_n(R)$ 上で単射かつ $i\neq j$ に対して $A_iA_j=A_jA_i=0$

(5) $V_n\equiv R\oplus\cdots\oplus R$ (n 個)、$W_j\equiv A_jV_n$ とおく。この時任意の i,j ($1\leq i,\ j\leq m$) に対して、$A_iW_j\leq W_j$ かつ $V_n=\bigoplus_{j=1}^{m}W_j$

4. 線形局所関数の群

定義３　M_n 上の群構造を持つ線形局所関数 $f=\sum A_j x_j$ と $g=\sum B_j x_j$ に対して、$f\sim g$ とは次の２つの条件を満足することである。

(1) f と g のスコープ幅が等しい。

(2). $\langle f\rangle$ の単位元 $=\langle g\rangle$ の単位元。

明らかに“$\sim$”は同値関係となる。f と同値な類を $G(f)$、又は、$G(A_1,\cdots,A_m)$ で表わす。

定理３　群構造を持つ線形局所関数 $f=\sum A_j x_j$，$g=\sum B_j x_j$ に対して次の各命題はすべて等価である。

(1)　$f \sim g$

(2)　$i \neq j$に対して．$A_i B_j = B_j A_i = O$

(3)　$C_j \in \{A_j, B_j\}$に対して．$h = \sum C_j x_j$なる形はすべて．群構造を持つ。

定理4　$g, h \in G(f)$　($g = \sum A_j x_j$, $h = \sum B_j x_j$)に対して $g * h = \sum A_j B_j x_j$と定義すると$G(f)$は演算$*$のもとで．群となる。

注意3　$\langle f \rangle$は$G(f)$の巡回部分群でアーベル群であるが．$G(f)$は必ずしもアーベル群ではない。

定理5　$g, h \in G(f)$　($g = \sum A_j x_j$, $h = \sum B_j x_j$)に対して次の各命題はすべて等価である。

(1)　$g^{-1} = h$　(局所関数の群の元として)

(2)　$g_\infty^{-1} = h_\infty$　(並列写像として)

(3)　$\sum A_j B_j = I$　かつ　$i \neq j$に対して　$A_i B_j = B_j A_i = O$

ここでIは単位行列

系2　$g \in G(f)$に対してgのスコープ幅と$g^{-1} \in G(f)$のスコープ幅は等しい。

定理6　Rを有限可換な局所環とする。$M_n(R)$上の群構造を持つ線形局所関数$f = \sum A_j x_j$に対して$\mathrm{rank}\, A_j = r_j$とする。この時．$G(A_1, \cdots, A_m) \simeq GL(r_1, R) \times \cdots \times GL(r_m, R)$が成立する．ここで$GL(r_j, R)$は$R$上の$r_j \times r_j$行列の一般

線形群。

注意 4　Rが有限可換環の時はRを局所環R_iへの直和分解 $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_\ell$ により，$M_n(R) = M_n(R_1) \oplus \cdots \oplus M_n(R_\ell)$ に直和分解される。従って $M_n(R)$ 上の線形局所関数 f を $M_n(R_i)$ 上に直和分解 $f = (f_1, \cdots, f_\ell)$ とすると

$$G(f) \simeq G(f_1) \times \cdots\cdots \times G(f_\ell) \quad となる。$$

$G(A_1, \cdots, A_m)$ を略して，$G(r_1, \cdots, r_m)$ と表わすと次の系が成立する。

系 3　(高野 [1])　$R = Z_p$　$n = 2$ の時　$G(1.1) \simeq GL(1) \times GL(1)$

従って，$G(1.1)$ はアーベル群である。

高野は [1] において，Z_p 上の 2×2 行列の線形局所関数の群，すなわち $G(1.1)$ を次のように構成してアーベル群であることを示した。

$f = A_1 x_1 + A_2 x_2$ とする時，$A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$ かつ $A_1 + A_2 = I$ (Iは単位行列）を満足する A_1, A_2 をみつける。そして $\{(iA_1, jA_2) \mid 1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq p-1\}$ を作る。明らかに，これは $GL(1) \times GL(1)$ と同型である。

系 4　Rを有限可換な局所環，$n = 3$ の時　$G(1.1.1)$ はアーベル群，$G(1.2) \simeq G(2.1) \simeq GL(1) \times GL(2)$ は非アーベル群.

上の系4より，行列環上の線形局所関数の群については

可換の場合と異なり"同型定理"は成立しない。

5. スペクトル分解可能な線形局所関数の群

定義4　Rを有限可換環とし、その極大イデアルの個数をℓとする。$M_n(R)$上の群構造を持つ線形局所関数fが、

$f=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j E_j$　の形に表わされる時、スペクトル分解可能という。ここで$\alpha_j\in R^*$（Rの単元の集合），g_jはR上の群構造を持つ単位元の線形局所関数，$\{E_j \mid 1\leq j\leq n\}$は単位の分解（すなわち、$E_1+\cdots+E_n=I$，$i\neq j$に対して$E_iE_j=E_jE_i=0$）

$G(f)$の部分群$H(f)$がスペクトル分解可能とは、$H(f)$のすべての元がスペクトル分解可能の時にいう。

注意5　$G(f)$の単位元f_0は、$f_0=\sum_{j=1}^{n}g_jE_j$　の形をしている。一方$f_0=\sum_{j=1}^{m}E_j'x_j$　の形に表わした時$\{E_j' \mid 1\leq j\leq m\}$は、やはり単位の分解となっている。

補題2　$H(f)$がスペクトル分解可能な$G(f)$の部分群とする。この時、$H(f)=\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g_j E_j \mid \alpha_j\in R^*\}$　かつ　$H(f)\simeq(R^*)^n$が成立する。

定理7（同型定理）　H_iをスコープ幅iのスペクトル分解可能な部分群とする。この時次の関係が成立する。

$$H_1\simeq H_2\simeq\cdots\simeq H_{n\ell}\simeq(R^*)^n$$

ここでnは行列のサイズ，ℓはRの極大イデアルの個数。

同型定理において、$n=1$ の時 $H_1 \simeq H_2 \simeq \cdots \simeq H_\ell \simeq R^*$ これはR上の同型定理と同じ形である。このことから、R上の群構造を持つ任意の線形局所関数fはスペクトル分解可能と予想されるが、実際次の定理が成り立つ。

定理8　有限可換環R上の群構造を持つ線形局所関数fに対して、fの単位元をf_0とすると、$f=\alpha f_0$　$(\alpha \in R^*)$の形に表わされ、しかもαはfによって一意に定まる。

上の定理8より、R上の同型定理が再び導かれる。

参考文献

[1] 高野敬子：「行列環上の線形局所関数に関する群論的研究」
東洋大学卒業研究論文　1982年3月

〔2〕佐藤忠一：「線形セル構造オートマトンのイデアル論的アプローチ」
数理解析研究所講究録522　1984年

〔3〕佐藤忠一：「行列環上の線形局所関数の群について」
科研費総合研究A　セル構造に基づく高度並列情報処理システムに関する総合的研究　1988年(仙台)

〔4〕佐藤忠一：「線形局所関数における＊演算と縮約作用について」
電子情報通信学会春季全国大会　1989年3月